# *LISTA 2: MACIERZE, DZIAŁANIA NA NICH. WYZNACZNIKI*

1. Dla podanych macierzy oblicz $3\cdot A$, $(-2)\cdot A$, $5\cdot A$:

a) $A=\begin{bmatrix}5\\8\\-3\\7\end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix}4&6\\5&7\end{bmatrix}$ c) $A=\begin{bmatrix}2&3&7\\-1&-2&3\end{bmatrix}$

A następnie wyznacz $A^T$.

2. Oblicz A+B, A-B, 2A-3B:

a) $A=\begin{bmatrix}11&33\\22&44\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-10&-30\\-20&-40\end{bmatrix}$. b) $A=\begin{bmatrix}3&0&-2\\-1&4&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&2&0\\1&-3&3\end{bmatrix}$.

3. Wykonaj mnożenia następujących par macierzy kwadratowych:

a) $\begin{bmatrix}2&5\\4&7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3&6\\2&8\end{bmatrix}=$ b) $\begin{bmatrix}2&4&1\\3&5&9\\7&2&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&10\\5&2&12\\1&3&-1\end{bmatrix}=$ c) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&10\\1&3&12\\3&3&-1\end{bmatrix}=$

d) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&2\\1&3\\3&3\end{bmatrix}=$ e) $\begin{bmatrix}1&0&5\\2&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&2&100\\10&-1&2\\3&3&-13\end{bmatrix}=$ f) $\begin{bmatrix}1&2&3&-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\3\\4\end{bmatrix}=$

4. Oblicz $A\cdot B$, $B\cdot A$ dla poniższych macierzy A i B:

a) $A=\begin{bmatrix}4&-1\\2&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&0{,}5\\-1&2\end{bmatrix}$. b) $A=\begin{bmatrix}3&5&-1\\4&4&-2\\5&3&-3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-3\\-2\\-1\end{bmatrix}$

c) $A=\begin{bmatrix}-3&4\\-2&2\\-1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-3&4&3\\-2&2&-1\\-1&1&2\end{bmatrix}$ d) $A=\begin{bmatrix}5\\8\\-3\\7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3&5&-1&4\end{bmatrix}$.

e) $A=\begin{bmatrix}1&-2\\3&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&-1&-3\\4&1&2\end{bmatrix}$ f) $A=\begin{bmatrix}3&2\\-1&3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&1\\2&5\end{bmatrix}$

5. Dane są macierze:

$A=\begin{bmatrix}1&4\\2&5\\6&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1&4\\2&1\\-4&2\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-1&4&0\\-2&1&0\\-4&2&1\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}-1&4\\-2&1\\-4&2\end{bmatrix}$

Oblicz następujące wyrażenia macierzowe:

a) *(3A+B)(C-2D)* *b)(A-B)(A+B)* *c)* $(A+B)^2$

6. Jakie powinny mieć wymiary macierze A i B, aby poniższe działania były wykonalne:

$(2A-C)B$ $\qquad$ $2B^TC^T-B^TA^T$ $\qquad$ gdy $C=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}$

7. Rozwiąż poniższe równania macierzowe:

a) $3X+\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}=-X$

b) $3\left(X-\begin{bmatrix}3 & -1 & 4\\ 2 & 5 & -2\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}\right)=X+\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\\ 2 & 7 & 5\\ 4 & 1 & -2\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3\\ -2 & 1\end{bmatrix}+2X=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & -2\end{bmatrix}$

d) $X+\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}=-2\left(X+\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)$

8. Wyznacz macierz X, jeśli wiadomo, że spełnia ona równanie:

a) $\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 2 & 3\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}3 & 2\\ 6 & 4\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}4 & -6\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}$

e) $X\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix}$

f) $\left(3X+\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & 2 & -3\\ 5 & -4 & -2\end{bmatrix}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{bmatrix}$

g) $2X+X\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 5 & 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 0 & -10 & -4\\ 15 & 0 & 18\end{bmatrix}$

9. Oblicz wyznaczniki:

$\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 3\end{vmatrix}=$ $\qquad$ $\begin{vmatrix}a & b\\ b & a\end{vmatrix}=$ $\qquad$ $\begin{vmatrix}a^2+1 & ax+1\\ ax+1 & x^2+1\end{vmatrix}=$

10. Oblicz wyznaczniki danych macierzy kwadratowych:

a) $M=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 4 & 1 & -3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}4 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & -3 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix}4 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 2\\ 4 & 1 & -3\end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ j) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

11. Oblicz wyznaczniki i zapisz możliwie najprostszej postaci powstałe wyrażenia:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = \qquad \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = \qquad \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a+x & b \\ 1 & a & b+y \end{vmatrix} = \qquad \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & x & b \\ 1 & a & x \end{vmatrix} =$$

12. Oblicz wyznaczniki, stosując w każdym przypadku dwukrotnie rozwinięcie Laplace'a względem różnych kolumn:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \qquad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

13.

Obliczyć dane wyznaczniki, stosując rozwinięcie Laplace'a:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 4 & 8 & 4 \end{vmatrix}$.