WYZNACZNIKI I MACIERZ ODWROTNA

1. Oblicz wyznaczniki macierzy:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$ b) $C = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 11 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 5 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ i) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ j) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

2. Oblicz wyznaczniki poniższych macierzy przy pomocy metody Saurrusa

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ b) $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

d) A^T oraz B^T

3. Oblicz wyznaczniki poniższych macierzy przy pomocy rozwinięcia Laplace'a

a) $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

4. Oblicz wyznaczniki poniższych macierzy przy pomocy rozwinięcia Laplace'a

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$,rozwijając wg 1 wiersza i drugi raz rozwijając wg 3 kolumny

b) $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$,rozwijając wg dowolnego wiersza i drugi raz rozwijając wg dowolnej kolumny

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ d) $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ e) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

5. Rozwiąż równania z niewiadomą x:

a) $\det\begin{bmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x+2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\det\begin{bmatrix} 0 & 1 & -x \\ 2 & 1+x & 8 \\ 0 & 2 & 5x \end{bmatrix} = 14$

6. Sprawdzić, czy $\det AB = \det A \cdot \det B$ przyjmując, że:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

7. Wyznaczyć macierz odwrotną macierzy:

a) $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ c) $B = \begin{bmatrix} x & 1 \\ -2 & x \end{bmatrix}$

d) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix}$ e) $D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ f) $A = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

g) $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ h) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i) $D = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

8. Pokazać, że zachodzą wzory: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ i $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$, jeśli:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ b). $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

9. Pokazać, że zachodzi wzór $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ dla:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix}.$$

10. Metodą macierzową rozwiązać układ równań:

a) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 4 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_3 = -4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$